

1.1

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА. РАЗЛОЖЕНИЕ ЧИСЛА НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ И СТЕПЕНЬ

А Кратные

В этой главе под термином «число» мы будем подразумевать 0 и натуральные числа (1, 2, 3, ...).

Число, полученное путём умножения данного натурального числа на натуральное число, называется **кратным** данного числа.

Например,

числа, кратные 3:	3×1	3×2	3×3	3×4	3×5	...
то есть	3	6	9	12	15	...

В Множители

Произвольное число, большее 1, можно выразить в виде произведения двух натуральных чисел.

Например,

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \times 12 \\ &= 2 \times 6 \\ &= 3 \times 4 \end{aligned}$$

Числа 1, 2, 3, 4, 6 и 12 являются **множителями** числа 12. В этих случаях число 12 делится без остатка на каждый из этих множителей. Поэтому множители числа также называются его **делителями**.

Какую связь вы заметили между кратными и делителями числа?

Число 12 кратно и числу 3, и числу 4.

$$12 = 3 \times 4$$

Числа 3 и 4 – делители (множители) числа 12.

Число, большее 1, делится без остатка на каждый из своих делителей.



ПОДУМАЙТЕ

- Является ли число 5 делителем числа 10? Почему?
- Является ли число 3 делителем числа 10? Почему?
- Может ли число, большее 10, быть делителем 10? Обоснуйте свой ответ.



КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- кратные
- делители
- делимость
- простое число
- составное число
- простые множители
- разложение на простые множители
- показатель степени
- основание
- степень

С Простые и составные числа



АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ 1

Цель: группировка чисел в зависимости от количества делителей.

- 1 а) Назовите делители чисел от 2 до 12. Ниже приведены делители некоторых чисел.

Число	Произведение(я)	Делители
2	$2 = 1 \times 2$	1, 2
3		
4	$4 = 1 \times 4$ $= 2 \times 2$	1, 2, 4
5		
6		
7		
8		
9	$9 = 1 \times 9$ $= 3 \times 3$	1, 3, 9
10		
11		
12	$12 = 1 \times 12$ $= 2 \times 6$ $= 3 \times 4$	1, 2, 3, 4, 6, 12

- б) Сгруппируйте числа от 2 до 12 по количеству их делителей (в качестве образца приведены числа 2 и 4).

Количество делителей	Числа
Два	2, , , ,
Больше двух	4, , , , ,

- 2 Обратите внимание на числа, которые имеют только два делителя. Что вы можете сказать об их делителях?



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

В равенстве $4 = 2 \times 2$ число 2, являющееся делителем числа 4, в списке делителей записывается один раз, хотя в равенстве записано два раза.

С помощью **активизирующего задания 1** мы определили следующее:

- Число, большее 1, может иметь два или более делителей. Число, имеющее только два делителя (1 и само число), называется **простым** числом.
- Число, у которого более двух делителей, называется **составным** числом.
- Число, большее 1, может быть либо простым, либо составным числом.

Памятка Числа 0 и 1 – ни простые, ни составные.



ПОДУМАЙТЕ

- 1 Почему 0 и 1 не являются простыми числами?
- 2 Может ли число быть одновременно и простым и составным? Почему?

Чтобы определить, является данное число простым или составным, надо проверить делимость числа на простые числа, меньшие, чем само число. Если число делится на составное число, то данное число делится на все простые делители данного составного числа.

$$90 = 5 \times 18$$

Составное число

↑

Делители: 1, 2, 3, 6, 9, 18

↑ ↑

Простые числа

ПРОГРАММИРОВАНИЕ



Знакомы ли вы с программированием? Если да, то можете ли вы написать программу, проверяющую, является ли число простым? Для размышления можете использовать блок-схему на странице 62.

1 ПРИМЕР

Определите, какими числами являются следующие числа: простыми или составными.

- a) 143 b) 29

РЕШЕНИЕ

- a) Проверьте, делится ли число 143 на простые числа, меньшие самого числа (2, 3, 5, 7, 11, ...).

$$143 \div 11 = 13$$

∴ 143 – составное число, так как имеет более двух делителей.

Памятка Делители числа 143 – числа 1, 11, 13 и 143.

- b) Проверьте, делится ли число 29 на простые числа, меньшие самого числа. Число 29 не делится ни на одно простое число.

∴ 29 – простое число, так как имеет только два делителя (1 и само число).



ВСПОМНИТЕ

С помощью активизирующего задания 1 мы определили все простые числа, меньшие 12. Это 2, 3, 5, 7 и 11.

1 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Определите, какими числами являются следующие числа: простыми или составными.

- a) 234 b) 171 c) 31



ПОДУМАЙТЕ

- 1 Покажите, что следующие числа являются составными.

- a) 135 b) 485 c) 920 d) 2320
e) 72 f) 134 g) 836 h) 7128

- 2 На основе выводов по заданию 1 определите, как можно использовать последнюю цифру числа, чтобы определить, является ли число составным.

D Разложение числа на простые множители

Дано составное число 30. Если записать число 30 в виде произведения простых множителей, то получим:

$$\underbrace{30}_{\text{Составное число}} = \underbrace{2}_{\text{Простые множители числа 30}} \times \underbrace{3}_{\text{Простые множители числа 30}} \times \underbrace{5}_{\text{Простые множители числа 30}}.$$

2, 3 и 5 являются **простыми множителями** числа 30.



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Не путайте разложение на множители числа 30 с нахождением его делителей.

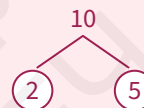
$$\begin{aligned} 30 &= 2 \times 15 \\ &= 3 \times 10 \\ &= 5 \times 6 \end{aligned}$$

Делители числа 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30. Необязательно, чтобы множители в этом списке были простыми числами. Например, 6 – не простое число, оно не является простым множителем числа 30.



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

На этой схеме показано дерево множителей.

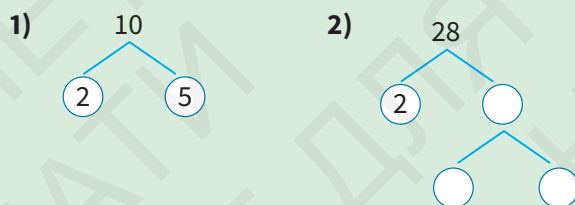


АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ 2

Цель: запись числа, большего 1, в виде произведения его простых множителей.

- 1 а)** Перечертите следующие схемы в тетрадь и заполните пустые ячейки.

Образец выполнения даётся в задании 1).



- б)** Запишите числа 10 и 28 в виде произведения простых множителей. Образец выполнения даётся в задании **1**.

1) $10 = 2 \times 5$ 2) $28 = \underline{\hspace{2cm}}$

- 2 а)** Заполните каждое дерево множителей.

Дерево множителей 1	Дерево множителей 2	Дерево множителей 3

- б)** Используя каждое дерево множителей, запишите число 280 в виде произведения простых множителей.

Дерево множителей 1: $280 = \underline{\hspace{2cm}}$

Дерево множителей 2: $280 = \underline{\hspace{2cm}}$

Дерево множителей 3: $280 = \underline{\hspace{2cm}}$

- с)** Что можете сказать о произведении в задании **2 б)**?

С помощью **активизирующего задания 2** мы определили, что число можно записать в виде нескольких произведений множителей.

Например,
 $280 = 10 \times 28$
 $280 = 2 \times 140$
 $280 = 4 \times 70$ и т. д.

Какое равенство бы ни взяли, мы получим одинаковое произведение простых множителей.

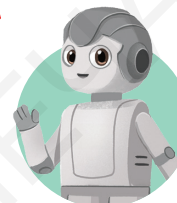
$$280 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7$$

Кроме того, от перестановки мест простых множителей произведение не изменится.

РАВНОСИЛЬНОСТЬ



Произведения
 $2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 7$ и
 $2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7$
 равносильны, так
 как значения обоих
 выражений равны 280.



- Любое натуральное число, большее 1, можно записать единственным образом в виде произведения простых множителей.
- Запись числа в виде произведения простых множителей называется **разложением на простые множители** этого числа.

2 ПРИМЕР

Запишите число 126 в виде произведения простых множителей.

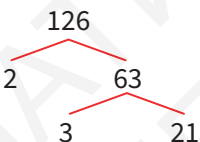
РЕШЕНИЕ

Способ 1. Дерево множителей

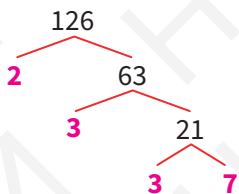
Дерево множителей можно получить следующим образом:



Запишем натуральные числа, произведение которых равно 126. Например, $126 = 2 \times 63$.



Число 2 является простым, поэтому его дальнейшее разложение невозможно. Разложение числа 63 на множители продолжается.



Закончим разложение тогда, когда в последней строке останутся простые множители. Произведение всех простых множителей на дереве называется разложением данного числа на простые множители.

Запишем число в виде произведения простых множителей:

$$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7.$$

Способ 2. Способ краткого деления

126	2
63	3
21	3
7	7
1	← Частное равно 1

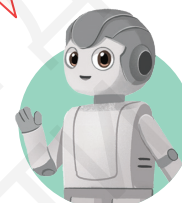
Разложение числа на простые множители – это представление данного числа в виде произведения его простых делителей.

$$\therefore 126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

РАВНОСИЛЬНОСТЬ



Известно, что
 $126 = 2 \times 63$
 $= 2 \times 3 \times 21$
 $= 2 \times 3 \times 3 \times 7.$
 Знак равенства « $=$ »
 означает,
 что все произведения:
 2×63 , $2 \times 3 \times 21$ и
 $2 \times 3 \times 3 \times 7$
 равносильны, так
 как значения всех
 выражений 126.



2 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Разложите на множители число 585, используя следующие способы.

- a) Дерево множителей б) Краткое деление



ПОДУМАЙТЕ

- а) С какого числа вы начнёте деление, если вас попросят записать число 360 в виде произведения простых делителей способом краткого деления? Почему?
- б) Удобно ли начинать деление с наименьшего простого числа при использовании способа краткого деления? Почему?



ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначения (знаки) – это символы, используемые для краткого обозначения математических объектов, действий и соотношений. Например, запись $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$ пишем как 6^5 .



Е Обозначение степени

С помощью **активизирующего задания 2** мы определили, что $280 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7$. Здесь мы можем увидеть произведение трёх чисел 2. Для краткой записи можно использовать **знак степени**: 2^3 . Тогда, $280 = 2^3 \times 5 \times 7$.

$2 \times 2 \times 2 = 2^3$ читается: «**2 в третьей степени**» или «**2 в кубе**».



В этой записи число 2 – **основание**, число 3 – **показатель степени**, 2^3 – **степень**.

Показатель степени указывает на то, сколько раз число берётся в качестве множителя.

Таким образом,

$2 \times 2 = 2^2$ – это «**2 во второй степени**» или «**2 в квадрате**»,

а $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ – это «**2 в четвёртой степени**».

Для краткой записи разложения числа на простые множители мы можем использовать знак степени.



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Выражения 2^4 и 2×4 не равны.

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

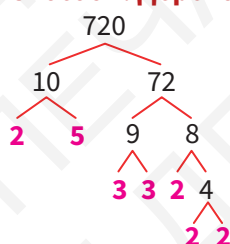
$$2 \times 4 = 8$$

3 ПРИМЕР

Запишите разложение числа 720 на простые множители, используя знак степени.

РЕШЕНИЕ

Способ 1. Дерево множителей



$$\begin{aligned} \therefore 720 &= 2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 2^4 \times 3^2 \times 5 \text{ (с показателем степени)} \end{aligned}$$

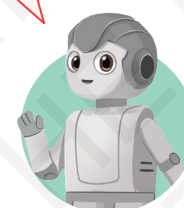
Способ 2. Краткое деление

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$\begin{aligned} \therefore 720 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \\ &= 2^4 \times 3^2 \times 5 \text{ (с показателем степени)} \end{aligned}$$

РАВНОСИЛЬНОСТЬ

Выражения $2^4 \times 3^2 \times 5$ и $5 \times 2^4 \times 3^2$ равносильны, так как значения обоих равны 720. Если записать простые множители в другом порядке, произведение всё равно будет равным 720. Можете ли привести примеры произведений, равносильных данному выражению?

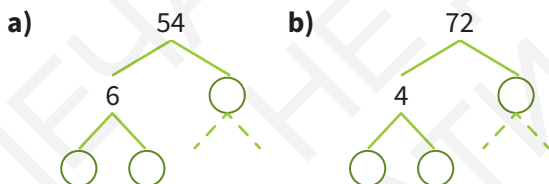


Разложите на простые множители число 702, используя знак степени.

1.1 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

- 1 Определите, простыми или составными являются следующие числа.
 a) 85 b) 83
 c) 103 d) 323
- 2 Запишите в виде степени.
 a) $8 \times 8 \times 8$ b) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
 c) $7 \times 7 \times 9$ d) $4 \times 4 \times 6 \times 6$
 e) $2 \times 3 \times 11 \times 11 \times 11$ f) $5 \times 5 \times 13 \times 5 \times 13 \times 37$
- 3 Найдите простые множители следующих чисел, используя дерево множителей. Запишите каждое число в виде произведения степеней простых множителей.



- 4 Найдите простые множители (делители) следующих чисел способом краткого деления. Запишите каждое число в виде произведения степеней простых множителей.

a) 784	2	b) 4851	3	c) 6125	5
392	2	1617	3		
196					

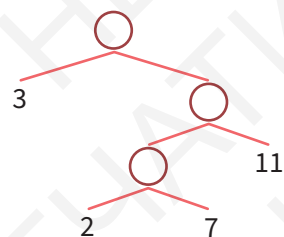
- 5 Запишите следующие числа в виде произведения степеней простых множителей.
 a) 180 b) 616
 c) 735 d) 1350

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

- 6 Вычислите.
 a) Наименьший простой делитель числа 377.
 b) Наибольшее кратное числа 17, меньшее 1000.
 c) Наименьшее кратное числа 19, большее 500.
- 7 a) Запишите первые 10 чисел, кратных 2.
 b) Запишите первые 10 чисел, кратных 3.
 c) Запишите первые 3 числа, кратные 2 и 3.
 d) Что вы можете сказать об общих кратных чисел 2 и 3 из задания c)?
- 8 Определите, верны или ложны следующие высказывания. Если высказывание ложно, приведите обратный пример (контрпример).
 a) Если 6 является делителем какого-либо числа, то 3 также будет делителем этого числа.
 b) Если числа 2 и 7 являются делителями какого-либо числа, то 14 также будет делителем этого числа.
 c) Если числа 2 и 8 являются делителями какого-либо числа, то 16 также будет делителем этого числа.

Памятка: Контрпример – это пример, опровергающий верность какого-либо утверждения.

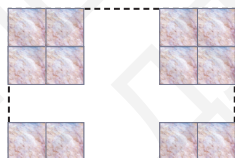
- 9 Чему равна сумма двух натуральных чисел, если их произведение равно 37?
- 10 a) Как можно найти число на вершине дерева множителей, не зная недостающих двух чисел?



- b) Заполните дерево множителей.

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

- 11 Прямоугольная стена покрыта одинаковыми квадратными плитками.



Определите, какие измерения может иметь стена, если для её покрытия было использовано:

- а) 18 плиток б) 41 плитка

- 12 Код замка – трёхзначное число. Аскар знает, что это число – наименьшее простое число, большее 100. Какое это число?



- 13 Объём кубоида равен 40 см^3 .

открытое

Какими могут быть два варианта его измерений, если известно, что они выражены натуральными числами?



- 14 Какой цифрой может быть последняя цифра двузначного простого числа? Обоснуйте свой ответ.

- 15 Учитель разделил 60 учащихся на равные группы. Количество детей в каждой группе больше 2, но меньше 8. Сколькими способами можно разделить учащихся на группы?

- 16 Найдите два последовательных простых натуральных числа. Существуют ли другие последовательные числа с такими же свойствами? Обоснуйте свой ответ.

открытое

- 17 Число разложили на множители в виде $24 \times 35 \times 72 \times 11$. Найдите три делителя этого числа, большие 100.

1.2 НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ (НОД)

Найдём делители (множители) чисел 18 и 24.

Делители числа 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18

Делители числа 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Общие делители чисел 18 и 24 – это 1, 2, 3 и 6. Поэтому оба числа делятся без остатка на 1, 2, 3 и 6. Наибольшее из них 6. Отсюда следует, что **наибольшим общим делителем (НОД)** чисел 18 и 24 является 6.

Наибольшим общим делителем двух или нескольких натуральных чисел называется наибольшее число, на которое делится каждое из данных чисел.

Кроме того, НОД используется для записи обыкновенной дроби в несократимом виде. Например, для того чтобы записать дробь $\frac{18}{24}$ в несократимом виде, надо числитель и знаменатель дроби разделить на НОД этих чисел следующим образом.

$$\frac{18}{24} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6} = \frac{3}{4}$$

НОД чисел 18 и 24 является число 6.



КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- общие делители
- наибольший общий делитель (НОД)



ВСПОМНИТЕ

Если число делится на другое число, остатка не будет.



ЭТО ИНТЕРЕСНО!

НОД также называют наибольшим общим множителем.