

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

- 11 Прямоугольная стена покрыта одинаковыми квадратными плитками.



Определите, какие измерения может иметь стена, если для её покрытия было использовано:

- а) 18 плиток б) 41 плитка

- 12 Код замка – трёхзначное число. Аскар знает, что это число – наименьшее простое число, большее 100. Какое это число?



- 13 Объём кубоида равен 40 см^3 .

открытое

Какими могут быть два варианта его измерений, если известно, что они выражены натуральными числами?



- 14 Какой цифрой может быть последняя цифра двузначного простого числа? Обоснуйте свой ответ.

- 15 Учитель разделил 60 учащихся на равные группы. Количество детей в каждой группе больше 2, но меньше 8. Сколькими способами можно разделить учащихся на группы?

- 16 Найдите два последовательных простых натуральных числа. Существуют ли другие последовательные числа с такими же свойствами? Обоснуйте свой ответ.

открытое

- 17 Число разложили на множители в виде $24 \times 35 \times 72 \times 11$. Найдите три делителя этого числа, большие 100.

1.2 НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ (НОД)

Найдём делители (множители) чисел 18 и 24.

Делители числа 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18

Делители числа 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Общие делители чисел 18 и 24 – это 1, 2, 3 и 6. Поэтому оба числа делятся без остатка на 1, 2, 3 и 6. Наибольшее из них 6. Отсюда следует, что **наибольшим общим делителем (НОД)** чисел 18 и 24 является 6.

Наибольшим общим делителем двух или нескольких натуральных чисел называется наибольшее число, на которое делится каждое из данных чисел.

Кроме того, НОД используется для записи обыкновенной дроби в несократимом виде. Например, для того чтобы записать дробь $\frac{18}{24}$ в несократимом виде, надо числитель и знаменатель дроби разделить на НОД этих чисел следующим образом.

$$\frac{18}{24} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6} = \frac{3}{4}$$

НОД чисел 18 и 24 является число 6.



КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- общие делители
- наибольший общий делитель (НОД)



ВСПОМНИТЕ

Если число делится на другое число, остатка не будет.



ЭТО ИНТЕРЕСНО!

НОД также называют наибольшим общим множителем.

4 ПРИМЕР

Найдите наибольший общий делитель чисел 225 и 750.

РЕШЕНИЕ

Способ 1. Разложение на простые множители

Запишем каждое из чисел 225 и 750 в виде произведения простых множителей:

$$225 = 3^2 \times 5^2$$

$$750 = 2 \times 3 \times 5^3$$

Нахождение общих делителей можно выразить следующим образом:

$$\begin{array}{rcll} 225 & = & \overset{3}{\downarrow} & \times 3 \times \overset{5}{\downarrow} \times \overset{5}{\downarrow} \\ 750 & = & 2 \times \overset{3}{\downarrow} \times \overset{5}{\downarrow} \times \overset{5}{\downarrow} \times \overset{5}{\downarrow} \\ \hline \text{НОД} & = & 3 & \times 5 \times 5 \\ \therefore \text{НОД} & = & 3 \times 5^2 & \text{Число 3 меньше } 3^2, \text{ а число } 5^2 \text{ меньше } 5^3. \\ & = & 75 & \end{array}$$

Памятка НОД трёх произвольных чисел равен произведению **наименьших** степеней общих делителей данных чисел. Ответ на предыдущий пример найден путём умножения **наименьших** степеней общих делителей каждого числа, т. е. умножением 3 и 5^2 .

Способ 2. Способ краткого деления

Данные два числа будем делить на их общие простые делители один за другим. Продолжим деление до тех пор, пока общих делителей не останется.

Например,

$$\begin{array}{rcl} 750 & 225 & \left. \begin{array}{l} 3 \\ 5 \\ 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Каждый делитель} \\ \leftarrow \text{является простым} \\ \leftarrow \text{делителем чисел} \\ \leftarrow \text{225 и 750.} \end{array} \\ 250 & 75 & \\ 50 & 15 & \\ 10 & 3 & \leftarrow \text{Общих простых делителей нет.} \end{array}$$

$$\therefore \text{НОД} = 3 \times 5 \times 5 = 75$$

Памятка Произведение всех общих простых делителей двух чисел называется их НОД.

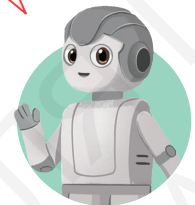


ОБСУДИТЕ

Мы нашли наибольший общий делитель двух или нескольких чисел, но почему не нашли наименьший общий делитель?

РАВНОСИЛЬНОСТЬ

Известно, что выражения 225 и $3^2 \times 5^2$, 750 и $2 \times 3 \times 5^3$ равны. Используя разложение чисел 225 и 750 , можно легко найти НОД этих чисел.



ОБСУДИТЕ

1. Чему равен НОД двух простых чисел? Обоснуйте свой ответ.
2. Может ли НОД двух натуральных чисел быть равным 0? Обоснуйте свой ответ.



ПОДУМАЙТЕ

Станет ли дробь $\frac{225}{750}$ несократимой, если разделить числитель и знаменатель дроби на их НОД? Обоснуйте свой ответ.

4

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

- а) Найдите НОД чисел 252 и 360 путём разложения на простые множители.
 б) Найдите НОД чисел 882 и 945, используя способ краткого деления.

5

ПРИМЕР

Найдите НОД чисел 84, 126 и 245.

РЕШЕНИЕ

$84 = 2^2 \times 3$	$\times 7$	Разложив числа на простые множители, можно определить результат, выбрав наименьшую степень каждого общего простого множителя.
$126 = 2 \times 3^2$	$\times 7$	
$245 =$	5×7^2	
НОД =	7	

Число 7 является единственным общим простым делителем чисел 84, 126 и 245.

$\therefore$ НОД = 7



ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Если два числа, например 15 и 16, не имеют общих делителей, больших 1, то их НОД равен 1 и эти числа называются взаимно простыми числами.



ПОДУМАЙТЕ

В предыдущем примере мы выяснили, что число 7 является НОД чисел 84, 126 и 245.

- а) Является ли число 7 НОД любой пары из этих трёх чисел?
 б) НОД каждой пары чисел больше или меньше 7? Обоснуйте свой ответ.

5

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

- а) Найдите НОД чисел 77, 110 и 242.
 б) Найдите НОД чисел 21, 108 и 275.

6 ПРИМЕР

Земельный участок прямоугольной формы со сторонами 20 м и 15 м разделён на равные квадратные площадки.

- Определите наибольшее возможное значение стороны квадратных площадок.
- На сколько частей разделён участок в таком случае?

АНАЛИЗ

Длины сторон прямоугольного участка (20 м и 15 м) должны делиться на длину стороны квадратной площадки без остатка. Но если взять сторону квадратной площадки, равную 10 м, то 15 не делится на 10, поэтому такое разбиение невозможно. Следовательно, длина стороны квадратной площадки должна быть общим делителем чисел 20 и 15.

Наибольшее возможное значение стороны квадратных площадок является наибольшим общим делителем (НОД) чисел 20 и 15.

РЕШЕНИЕ

- $20 = 2^2 \times 5$
 $15 = 3 \times 5$
НОД чисел 15 и 20 равен 5.
Наибольшее возможное значение стороны каждой квадратной площадки равно 5 м.

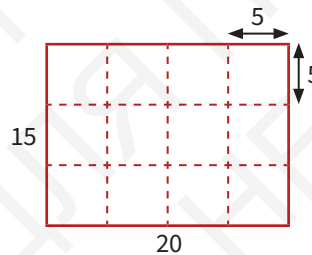
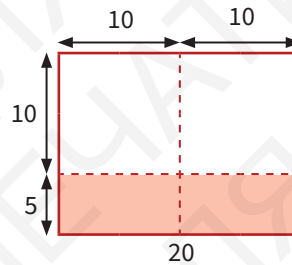
- Число квадратов по длине земельного участка
 $= 20 \div 5$
 $= 4$

Число квадратов по ширине земельного участка равно $15 \div 5 = 3$

Следовательно, число квадратных площадок равно $4 \times 3 = 12$.

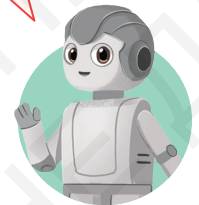
Определим число квадратных площадок другим способом.

Число квадратных площадок = площадь прямоугольника $\div$ площадь одного квадрата
 $= (20 \times 15) \div (5 \times 5)$
 $= 12$



ЧЕРТЕЖИ

При решении задач можно использовать чертежи. Для изображения прямоугольного земельного участка начертили прямоугольник. Чтобы увидеть связь между длиной, шириной прямоугольника и стороной квадрата, прямоугольник разделили на квадраты.



6 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Кубоид с измерениями 56 см, 40 см и 24 см разделили на равные кубы.

- Найдите наибольшую возможную длину ребра полученного куба.
- Определите число кубов из задания а).



ОБСУДИТЕ

Как можно найти наименьшую сторону квадратных площадок?

7 ПРИМЕР

У Камола имеется 252 яблока и 360 гранатов. Она хочет разложить фрукты поровну по одинаковым корзинам так, чтобы ни один фрукт не остался.

- а) Каково наибольшее возможное число корзин, в которые Камола может распределить фрукты поровну?
- б) Сколько яблок в каждой корзине?

АНАЛИЗ

Чтобы понять задачу и найти способ её решения, решим задачу с меньшим количеством фруктов. Например, распределим 20 яблок и 15 гранатов.

Если число корзин 2, то 20 яблок мы сможем распределить поровну, но 15 гранатов не сможем.

Если число корзин 3, то 20 яблок мы не сможем распределить поровну, но 15 гранатов сможем.

Отсюда следует, что число корзин, по которым можно разложить фрукты поровну, является общим делителем числа яблок и гранатов. Наибольшее возможное число корзин, в которые Камола может распределить фрукты, является НОД числа яблок и гранатов.

РЕШЕНИЕ

- а) Разложим на простые множители каждое число.

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$\begin{aligned}\text{НОД чисел } 252 \text{ и } 360 &= 2^2 \times 3^2 \\ &= 36\end{aligned}$$

Наибольшее возможное число корзин, в которые Камола может разложить фрукты, составляет 36 штук.

- б) $252 \div 36 = 7$

Число яблок в каждой корзине равно 7.



ПОДУМАЙТЕ

Изменится ли ответ задачи **из примера 7 а)**, если Камола захочет разложить по корзинам ещё 72 груши? Обоснуйте свой ответ.

7 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Для подготовки концертной программы собрались участники трёх категорий. В категории танцовщиков – 48 человек, в категории музыкантов – 84, а в категории певцов – 144. Все участники хотят готовиться к концерту, разделившись на несколько команд с равным числом человек.

- а) Найдите наибольшее возможное число образованных команд.
- б) По сколько человек каждой категории будет в команде?

1.2 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

- 1 Найдите НОД чисел.
- a) 8 и 12 b) 45 и 72
c) 74 и 99 d) 120 и 225
e) 108 и 240 f) 385 и 396
- 2 Найдите НОД чисел.
- a) 28, 63 и 91 b) 60, 75 и 100
c) 14, 36 и 175 d) 70, 210 и 350

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

- 3 Найдите наибольшее число, которое является делителем чисел 54 и 180.
- 4 Найдите наибольшее натуральное число, на которое делятся числа 77, 110 и 242.
- 5 Два числа разложены на простые множители: $2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$ и $2 \times 3^4 \times 7^3 \times 13$. Найдите наибольшее натуральное число, на которое делятся данные числа.
- 6 Две проволоки, длины которых равны 72 см и 96 см, разделены на равные части. Найдите наибольшую возможную длину каждой части.
- 7 Металлический лист прямоугольной формы с измерениями 360 см и 280 см разделён на равные квадраты.
- a) Найдите сторону каждого квадрата.
b) Определите количество квадратов.
- 8 Сардор хочет разложить 132 плитки белого и 154 плитки чёрного шоколада по коробкам. В каждую коробку он положил равное количество шоколада каждого вида.
- a) Найдите наибольшее возможное число коробок.
b) Сколько плиток шоколада каждого вида в одной коробке?
- 9 В магазине объём продаж калькуляторов одной и той же модели в течение 3 дней составил соответственно 1 800 000 сумов, 4 140 000 сумов и 3 060 000 сумов.

- a) Найдите максимальную цену калькулятора.
b) Найдите общее число калькуляторов, проданных по этой цене за 3 дня.

- 10 Хаким района распорядился раздать семьям, проживающим в районе, 420 kg риса, 168 бутылок масла и 504 kg сахара в равных количествах.
- a) Найдите наибольшее возможное число семей, получивших продукты.
b) Можно ли этим семьям поровну раздать 250 упаковок молока? Если нельзя, то сколько ещё упаковок молока потребуется, чтобы распределить поровну молоко между получившимся числом семей?

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

- 11 Найдите два составных числа, НОД которых равен 1.
- 12 Найдите два разных натуральных числа, меньших 100, НОД которых равен 18.
- 13 Задуманное число имеет 8 делителей. Два из них – это 4 и 6. Найдите задуманное число.
- 14 Найдите 3 таких числа, чтобы НОД каждой пары был больше 1, но НОД трёх чисел был равен 1. Например, числа 6, 10 и 15 удовлетворяют данному условию.
- 15 В коробках находится одинаковое количество ручек. В магазине за два дня было продано 1518 и 2254 ручек соответственно. Определите количество ручек, которое могло быть в коробке при условии, что все ручки из открытых коробок продавались в тот же день. Приведите два возможных случая.
- 16 Произведение двух чисел равно 8820, их НОД равен 42. Найдите наибольшее из этих чисел.
- 17 Найдите такое наибольшее число, при делении на которое у чисел 171, 255 и 304 остатки будут равными.