

1.4

КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ
И КУБИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ

А Квадратный корень

Числа можно записать в виде степени: $3 \times 3 = 3^2$. Выражение 3^2 читается: «3 в квадрате». Так как $3^2 = 9$, то число 9 называется **квадратом** 3, а число 3 – **арифметическим квадратным корнем** из 9 и записывается в виде $\sqrt{9} = 3$.

Таким образом,

$$2^2 = 2 \times 2 = 4 \quad \text{и} \quad \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$4^2 = 4 \times 4 = 16 \quad \text{и} \quad \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$5^2 = 5 \times 5 = 25 \quad \text{и} \quad \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$$

Числа **1, 4, 9, 16, 25, ...** называются **квадратными числами** или **полными квадратами**. Используя разложение на простые множители, можно вычислить квадратный корень полного квадрата.

Число, квадратный корень из которого является натуральным числом, называется **полным квадратом**.

13

ПРИМЕР

Запишите число 144 в виде произведения простых множителей. Вычислите $\sqrt{144}$.

АНАЛИЗ

144 – полный квадрат. Запишем его в виде произведения двух одинаковых чисел или в виде произведения двух групп с одинаковыми простыми множителями.

РЕШЕНИЕ

Запишем 144 в виде произведения простых множителей.

$$\begin{aligned} 144 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\ &= 2^4 \times 3^2 \end{aligned}$$

Разложим простые множители на две одинаковые группы.

$$\begin{aligned} 144 &= (2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 3) \\ &= (2^2 \times 3) \times (2^2 \times 3) \\ &= (2^2 \times 3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{144} &= \sqrt{(2^2 \times 3)^2} \\ &= 2^2 \times 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Правая сторона равенства является квадратом числа.

$$\square \times \square = \square^2$$

Здесь, $\square = 2^2 \times 3$.

Вычислим квадратный корень.

КЛЮЧЕВЫЕ
ТЕРМИНЫ

- квадрат
- арифметический квадратный корень
- квадрат числа
- полный квадрат
- куб
- кубический корень
- полный куб
- куб числа

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\sqrt{\quad}$ – обозначение квадратного корня. $\sqrt{9}$ означает: квадратный корень из 9.

$$\sqrt{9} = 3.$$

Чему равен $\sqrt{64}$?



ВСПОМНИТЕ

Для произвольного натурального числа n выполняется равенство: $\sqrt{n^2} = n$.

ОБРАТИТЕ
ВНИМАНИЕ!

Квадратный корень числа можно вычислить на калькуляторе с помощью нажатия кнопки $\sqrt{\quad}$.



ПОДУМАЙТЕ

Обратите внимание на степени простых множителей и квадратный корень из числа 144. Что вы можете сказать о степенях каждого простого множителя и квадратном корне полного квадрата?

13 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Запишите число 484 в виде произведения степеней простых множителей.
Вычислите $\sqrt{484}$.



ОБСУДИТЕ

Дано число $n = 2^6 \times 5^4 \times 7^3$.
Будет ли число n полным квадратом? Обоснуйте свой ответ.

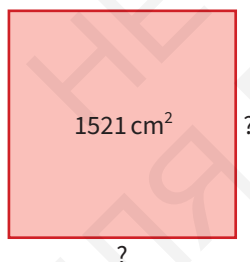
14 ПРИМЕР

Площадь квадрата равна 1521 cm^2 . Найдите длину стороны квадрата, используя разложение числа на простые множители.

РЕШЕНИЕ

Разложим число на простые множители: $1521 = 3 \times 3 \times 13 \times 13$.
Площадь квадрата = сторона $\times$ сторона.

$$\begin{aligned} \text{Сторона} &= \sqrt{\text{площади}} \\ &= \sqrt{3 \times 3 \times 13 \times 13} \\ &= \sqrt{(3 \times 13)^2} \\ &= 3 \times 13 \\ &= 39 \text{ cm} \end{aligned}$$



○ Длина стороны квадрата равна 39 cm.



ОБСУДИТЕ

Достаточно ли проверить делимость числа на простые числа, меньшие квадратного корня из этого числа, чтобы определить, является ли оно простым? Обоснуйте свой ответ.

14 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Площадь квадрата равна 7225 cm^2 . Найдите длину стороны квадрата, используя разложение числа на простые множители.

15 ПРИМЕР

n – такое число, при котором $40 \times n$ – полный квадрат. Найдите наименьшее натуральное значение n .

АНАЛИЗ

Для того чтобы выражение $40 \times n$ было полным квадратом, число n может быть равным 40. То есть (40×40) будет полным квадратом. Кроме того, есть и другие значения n , при которых число $(40 \times n)$ также будет полным квадратом.

$$\begin{aligned}\text{Например, } 40 \times n &= 40 \times 40 \times 2 \times 2 \\ &= (40 \times 2) \times (40 \times 2).\end{aligned}$$

Наименьшее значение n – это 40? Как можно это определить?

Для этого нужно число 40 разложить на простые множители. Но разложить на простые множители число n мы не можем.

РЕШЕНИЕ

$$\begin{aligned}40 \times n &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times n \\ &= 2 \times 2 \times 5 \times 2 \times n \\ &= (2 \times 2 \times 5) \times (2 \times n)\end{aligned}$$

Так как $40 \times n$ – полный квадрат, то для нахождения наименьшего натурального значения n выражения $(2 \times 2 \times 5)$ и $(2 \times n)$ должны быть равны.

$$\begin{aligned}40 \times n &= (2 \times 2 \times 5) \times (2 \times 2 \times 5) \\ \therefore n &= 2 \times 5 \\ &= 10\end{aligned}$$

Наименьшее натуральное значение n равно 10.



ПОДУМАЙТЕ

- 1 Есть ли ещё такие значения числа n , при которых выражение $40 \times n$ будет полным квадратом?
- 2 Вы уверены, что наименьшее значение числа n , при котором выражение $40 \times n$ будет полным квадратом, равно 2×5 ?

15 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Найдите наименьшее натуральное значение числа k , при котором выражение $24 \times k$ будет полным квадратом.



ВСПОМНИТЕ

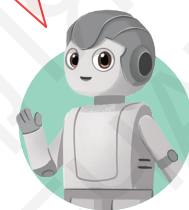
Для произвольного натурального числа n верно равенство:

$$\sqrt[3]{n^3} = n.$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ



« $\sqrt[3]{}$ » – является знаком кубического корня. Число 3 используется для обозначения кубического корня. Для записи кубического корня из 8 используем краткую запись: $\sqrt[3]{8}$. Как вычисляется кубический корень из 1000?



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Для вычисления кубического корня на калькуляторе используется кнопка $\sqrt[3]{}$. В некоторых случаях сначала нажимается кнопка **SHIFT**.

В Кубические корни

$2 \times 2 \times 2 = 2^3$ мы можем записать в виде степени. Выражение 2^3 читается: «2 в кубе». Так как $2^3 = 8$, то число 8 называется **кубом** 2, а число 2 – **кубическим корнем** из 8 и записывается в виде $\sqrt[3]{8} = 2$.

Таким образом,

$$\begin{array}{ll} 1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1 & \text{и} \quad \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1^3} = 1 \\ 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 & \text{и} \quad \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2 \\ 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27 & \text{и} \quad \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3 \\ 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64 & \text{и} \quad \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \end{array}$$

Числа **1, 8, 27, 64, ...** называются **полными кубами** или **кубическими числами**. Разложив полный куб на простые множители, мы можем вычислить его кубический корень.

Число, кубический корень которого является натуральным числом, называется **полным кубом**.

16 ПРИМЕР

Вычислите кубический корень из числа 216, разложив его на простые множители.

РЕШЕНИЕ

Разложим число 216 на простые множители.

$$\begin{aligned} 216 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= 2^3 \times 3^3 \end{aligned}$$

Разделим простые множители на 3 одинаковые группы.

$$\begin{aligned} 216 &= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \\ &= (2 \times 3)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt[3]{216} &= \sqrt[3]{(2 \times 3)^3} \\ &= 2 \times 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Правую часть равенства запишем в виде куба числа.

$$\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}^3$$

Здесь, $\boxed{} = 2 \times 3$.

Получим кубический корень.

16 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите кубический корень из числа 1728, используя разложение числа на простые множители.



ПОДУМАЙТЕ

Дано число, разложенное на простые множители: $2^6 \times 3^{12} \times 5^{36}$.

- Будет ли это число полным кубом? Почему?
- Будет ли это число полным квадратом? Почему?
- Что вы можете сказать о степенях простых множителей чисел, которые являются одновременно и полными квадратами и полными кубами?

17 ПРИМЕР

Найдите наименьшее натуральное значение m , при котором выражение $540 \times m$ будет полным кубом.

АНАЛИЗ

Для того чтобы вычислить наименьшее значение m , выразим число 540 в виде произведения простых множителей так, чтобы в выражении $540 \times m$ было три одинаковые группы простых чисел.

РЕШЕНИЕ

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

$$\begin{aligned}
 540 \times m &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times m \\
 &= (2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3 \times 3 \times m)
 \end{aligned}$$

Отсюда мы можем найти наименьшее натуральное значение m :

$$2 \times 3 \times 3 \times m = (2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3 \times 5). \text{ Здесь, } 540 \times m - \text{полный куб.}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore m &= 2 \times 5 \times 5 \\
 &= 50
 \end{aligned}$$

- Наименьшее натуральное значение m равно 50.



ОБСУДИТЕ

Можете ли вы найти наибольшее значение m в примере 17? Обоснуйте свой ответ.



ПОДУМАЙТЕ

- Вы уверены, что при наименьшем значении $m = 2 \times 5 \times 5$ выражение $540 \times m$ будет полным кубом? Обоснуйте свой ответ.
- Что вы можете сказать о степенях простых множителей выражения $540 \times m$, если $m = 50$?

17 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Найдите наименьшее натуральное значение числа k , при котором значение $600 \times k$ будет полным кубом.

1.4 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

- 1 Вычислите квадратные корни из следующих чисел, используя разложение на простые множители.
- a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{121}$
c) $\sqrt{196}$ d) $\sqrt{256}$
e) $\sqrt{441}$ f) $\sqrt{676}$
- 2 Вычислите кубические корни из следующих чисел, используя разложение на простые множители.
- a) $\sqrt[3]{343}$ b) $\sqrt[3]{512}$
c) $\sqrt[3]{729}$ d) $\sqrt[3]{1331}$
e) $\sqrt[3]{4096}$ f) $\sqrt[3]{8000}$

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

- 3 Вычислите квадратные корни из чисел, представленных в виде степени.
- a) $5^4 \times 7^2$ b) $2^6 \times 11^{10}$
- 4 Вычислите кубические корни из чисел, представленных в виде степени.
- a) $2^3 \times 19^6$ b) $3^{12} \times 5^9$
- 5 a) Вычислите НОД чисел 63 и 117.
b) Вычислите квадратный корень из ответа пункта a).
- 6 Вычислите кубический корень из НОК чисел 24 и 108.
- 7 a) Вычислите куб выражения: $2^4 \times 5^2$.
b) Вычислите квадратный корень из ответа пункта a). Ответ представьте в виде степени.
- 8 a) Вычислите квадрат выражения: $7^6 \times 19^3$.
b) Вычислите куб из ответа пункта a). Представьте ответы в виде степени.
- 10 Объём куба равен 2197 см^3 . Найдите ребро куба.
- 11 Площадь рамки квадратной формы равна 2601 см^2 . Найдите периметр рамки.
- 12 a) Разложите число 129 600 на простые множители.
b) Во время эксперимента выяснилось, что скорость пули равна $\sqrt{129\,600} \text{ м/с}$. Представьте скорость пули в виде степени.
- 13 Из проволоки сконструировали модель куба. Объём куба равен $10\,648 \text{ см}^3$.
- a) Найдите длину ребра куба.
b) Найдите длину использованной проволоки.
- 14 Число $6 - \text{делитель } 5 \blacklozenge 32$, где $\blacklozenge$ – неизвестная цифра.
- a) Найдите все значения $\blacklozenge$.
b) Если $5 \blacklozenge 32$ – полный куб, то:
1) Найдите значение $\blacklozenge$.
2) Найдите кубический корень этого числа.
c) Запишите все значения $\blacklozenge 5$ из пункта a). Какие два общих свойства имеют эти числа?
- 15 Найдите наименьшее натуральное значение числа n , при котором выражение $2160 \times n$ будет полным квадратом.
- 16 Найдите наименьшее натуральное значение числа m , при котором выражение $36 \times m$ будет полным кубом.
- 17 Найдите наибольший полный квадрат среди делителей числа 1575.
- 18 Найдите наименьшее значение n , при котором $600n$ будет и полным квадратом и полным кубом.

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

- 9 Железный лист квадратной формы имеет площадь 7056 см^2 . Найдите длину стороны листа.
- 18 Найдите наименьшее значение n , при котором $600n$ будет и полным квадратом и полным кубом.