

## 2.3

# УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ. ВЫПОЛНЕНИЕ ДЕЙСТВИЙ НАД ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ

## А Умножение целых чисел

Мы знаем, что умножение натуральных чисел можно заменить сложением. Например,  $3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$ .

Рассмотрим **умножение целых чисел** с помощью алгебраических кнопок.



### АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ 4



#### КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

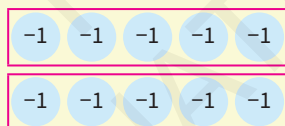
- умножение целых чисел
- обратное число
- деление целых чисел
- порядок выполнения действий
- алгебраический квадратный корень

**Цель:** умножение целых чисел с помощью алгебраических кнопок.

**Умножение положительного целого на отрицательное целое число**

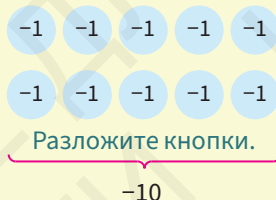
Пример.

Вычислите:  $2 \times (-5)$ .



Возьмите 2 группы кнопок «-1» по 5 штук.  
 $2(-5)$

$$\therefore 2 \times (-5) = -10$$



**1** Вычислите.

**a)**  $5 \times (-2)$

**b)**  $4 \times (-3)$

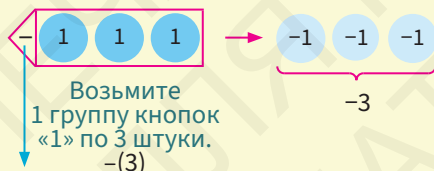
**Умножение отрицательного целого числа на положительное целое число**

Примеры:

**1)** Вычислите:  $(-1) \times 3$ .

Произведения  $(-1) \times 3$  и  $-(1 \times 3)$  равны.

Переверачиванием алгебраических кнопок можно показать, что выражение  $-(1 \times 3)$  имеет значение, противоположное группе из трёх **1**.



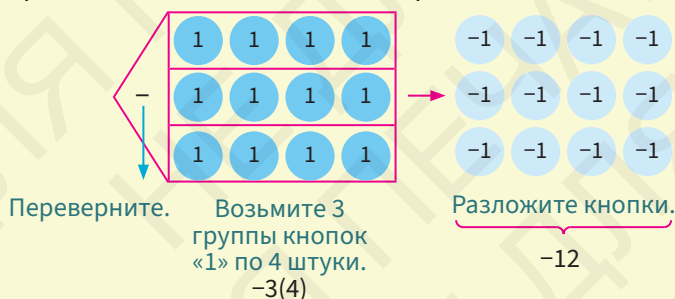
Этот знак показывает, что все кнопки в фигуре нужно перевернуть.

$$\therefore (-1) \times 3 = -3$$

2) Вычислите:  $(-3) \times 4$ .

$$(-3) \times 4 = -(3 \times 4)$$

Переверните 3 группы кнопок по 4 штуки, чтобы показать противоположное значение выражения.



$$\therefore (-3) \times 4 = -12$$

2) Вычислите.

a)  $(-5) \times 2$

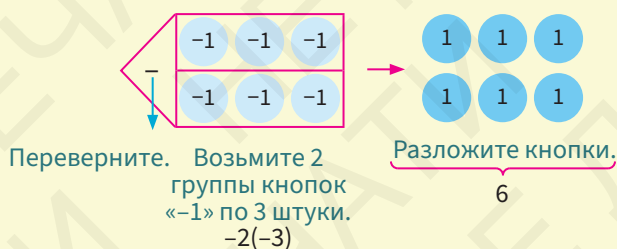
b)  $(-2) \times 3$

### Умножение двух целых отрицательных чисел

Пример.  $(-2) \times (-3)$ .

$$(-2) \times (-3) = -[2 \times (-3)]$$

Переверните 2 группы кнопок по 3 штуки, чтобы показать противоположное значение выражения.



$$\therefore (-2) \times (-3) = 6$$



### ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Вспомните, что число, противоположное числу  $-3$ , можно записать в виде  $-(-3) = 3$ . Это выражение можно записать таким образом:

$$-(-3) = (-1) \times (-3) = 3.$$

3) Вычислите.

a)  $(-3) \times (-2)$

b)  $(-4) \times (-3)$

4) Определите, положительны или отрицательны следующие числа, используя ответы из заданий 1, 2 и 3.

- Произведение двух положительных целых чисел.
- Произведение положительного целого числа и отрицательного целого числа.
- Произведение отрицательного целого числа и положительного целого числа.
- Произведение двух отрицательных целых чисел.

5) Вычислите. Что вы заметили?

- $2 \times 5$  и  $5 \times 2$
- $2 \times (-5)$  и  $(-5) \times 2$
- $(-3) \times (-6)$  и  $(-6) \times (-3)$

С помощью **активизирующего задания 4** мы определили следующее:

- Положительное целое число  $\times$  Положительное целое число = Положительное целое число. Например,  $2 \times 3 = 6$ .
- Положительное целое число  $\times$  Отрицательное целое число = Отрицательное целое число. Например,  $2 \times (-3) = -6$ .
- Отрицательное целое число  $\times$  Положительное целое число = Отрицательное целое число. Например,  $(-2) \times 3 = -6$ .
- Отрицательное целое число  $\times$  Отрицательное целое число = Положительное целое число. Например,  $(-2) \times (-3) = 6$ .
- Произведение двух целых чисел коммутативно. Например,  $5 \times 2 = 2 \times 5$ ,  $2 \times (-5) = (-5) \times 2$ ,  $(-3) \times (-6) = (-6) \times (-3)$ .

|   |          |   |   |   |
|---|----------|---|---|---|
| + | $\times$ | + | = | + |
| + | $\times$ | - | = | - |
| - | $\times$ | + | = | - |
| - | $\times$ | - | = | + |

## 8 ПРИМЕР

Найдите значения выражений без использования калькулятора или алгебраических кнопок.

- a)  $(-6) \times 9$                       b)  $(-4) \times (-4)$   
 c)  $(-2) \times (-2) \times (-2)$       d)  $8 \times (-4) \times (-7)$

### РЕШЕНИЕ

- a)  $(-6) \times 9 = -(6 \times 9) = -54$                       Отрицательное число  $\times$  Положительное число = Отрицательное число  
 $(-) \times (+) \rightarrow (-)$   
 b)  $(-4) \times (-4) = 4 \times 4 = 16$                       Отрицательное число  $\times$  Отрицательное число = Положительное число  
 $(-) \times (-) \rightarrow (+)$   
 c)  $(-2) \times (-2) \times (-2) = [(-2) \times (-2)] \times (-2)$   
 $= 4 \times (-2) = -8$                        $(-) \times (-) \rightarrow (+)$   
 $(+) \times (-) \rightarrow (-)$   
 d)  $8 \times (-4) \times (-7) = (-32) \times (-7)$   
 $= 32 \times 7 = 224$                        $(+) \times (-) \rightarrow (-)$   
 $(-) \times (-) \rightarrow (+)$



### ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Произведение  $(-4) \times (-4)$  можно ещё записать в виде  $(-4)^2$ . Из **примера 8b)** видно, что  $(-4)^2$  тоже положительное число.



### ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Из **примера 8c)** следует, что  $\sqrt[3]{-8} = -2$ , то есть кубический корень из отрицательного числа является отрицательным числом.

## 8 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Найдите значения выражений без использования калькулятора или алгебраических кнопок.

- a)  $(-12) \times 8$                       b)  $(-66) \times 0$   
 c)  $(-7) \times (-7)$                       d)  $(-3) \times (-3) \times (-3)$   
 e)  $(-4)^3$                               f)  $(-5) \times 6 \times (-4)$

## 9 ПРИМЕР

Найдите значения выражений без использования калькулятора или алгебраических кнопок.

- a) Квадратный корень из 36.      b) Кубический корень из  $-1000$ .

### АНАЛИЗ

В **примере 8 b)** оба числа: и 4 и  $-4$ , являются квадратными корнями из 16. Они называются алгебраическими квадратными корнями. Если  $\blacksquare$  – это положительный квадратный корень из 36, то  $-\blacksquare$  также является отрицательным квадратным корнем из 36.

## РЕШЕНИЕ

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 36 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\ &= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \\ &= (2 \times 3)^2 \end{aligned}$$

Алгебраический

$$\begin{aligned} \text{квадратный корень из } 36 &= \pm\sqrt{36} \\ &= \pm\sqrt{(2 \times 3)^2} \\ &= \pm(2 \times 3) \\ &= \pm 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 1000 &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \\ &= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \\ &= (2 \times 5)^3 \end{aligned}$$

$$-1000 = -(2 \times 5)^3$$

$$\begin{aligned} \text{Кубический корень из } -1000 &= \sqrt[3]{-1000} \\ &= \sqrt[3]{-(2 \times 5)^3} \\ &= -\sqrt[3]{(2 \times 5)^3} \\ &= -(2 \times 5) \\ &= -10 \end{aligned}$$

**Памятка** Знак  $\pm$  читается: «плюс минус».



## ПОДУМАЙТЕ

- 1 Имеет ли смысл квадратный корень из  $-16$ ? Обоснуйте свой ответ.
- 2 а) Могут ли кубические корни быть как положительными, так и отрицательными числами?
- б) Сколько кубических корней имеет каждое число? Обоснуйте свой ответ.

## 9

## ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите без использования калькулятора.

- а) Квадратный корень из 64
- б) Кубический корень из  $-64$
- с)  $\sqrt{121}$
- д)  $\sqrt[3]{-125}$

## В Деление целых чисел

Выражение  $12 \div 3$  можно записать в виде  $12 \times \frac{1}{3}$ . Ответы обоих выражений будут равными.

$$\begin{aligned} 12 \div 3 &= 12 \times \frac{1}{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$\frac{1}{3}$  – это число, **обратное** числу 3. А 3 – это число, обратное числу  $\frac{1}{3}$ .

Таким образом, правило **деления целых чисел** можно вывести на основании правила умножения целых чисел.

Примеры.

|                         |                                                                    |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $4 \times 3 = 12$       | $12 \div 3 = \frac{12}{3} = 12 \times \frac{1}{3} = 4$             |
| $4 \times (-3) = -12$   | $(-12) \div (-3) = \frac{-12}{-3} = (-12) \times \frac{1}{-3} = 4$ |
| $(-4) \times 3 = -12$   | $(-12) \div 3 = \frac{-12}{3} = (-12) \times \frac{1}{3} = -4$     |
| $(-4) \times (-3) = 12$ | $12 \div (-3) = \frac{12}{-3} = 12 \times \frac{1}{-3} = -4$       |

## ОБОЗНАЧЕНИЯ



### В примере 8 б)

мы увидели, что  $(-4)^2 = 16$ . Значит,  $-4$  тоже является алгебраическим квадратным корнем из 16. Знак  $\sqrt{\quad}$  означает только положительный квадратный корень, то есть  $\sqrt{16} = -4$  не пишется. Вместо этого следует писать  $\sqrt{16} = 4$  и  $-\sqrt{16} = -4$ . Алгебраический квадратный корень из 16 можем записать в виде  $\pm \sqrt{16}$ , то есть  $\pm \sqrt{16} = \pm 4$ . Как вы запишете алгебраический квадратный корень из 25?



## ОБСУДИТЕ

Чему может быть равно  $4 \div 0$ ?

## 10 ПРИМЕР

Вычислите.

a)  $20 \div 5$

b)  $(-42) \div (-7)$

c)  $24 \div (-6)$

d)  $(-36) \div 3$

### РЕШЕНИЕ

a)  $20 \div 5 = \frac{20}{5} = 4$

b)  $(-42) \div (-7) = \frac{-42}{-7} = 6$

c)  $24 \div (-6) = -\frac{24}{6} = -4$

d)  $(-36) \div 3 = -\frac{36}{3} = -12$

## 10 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите.

a)  $16 \div 2$

b)  $(-75) \div (-5)$

c)  $63 \div (-7)$

d)  $(-54) \div 6$

## С Выполнение действий над целыми числами

В этой части мы распространим правила **порядка выполнения действий** над натуральными числами на все целые числа следующим образом:

- **Скобки.** Сначала выполните действия в скобках. Если скобок несколько, начинайте с внутренних.
- **Степени и корни.** Затем вычислите степени и корни.
- **Умножение и деление.** Далее выполните умножение и деление слева направо.
- **Сложение и вычитание.** В конце выполните сложение и вычитание слева направо.

## 11 ПРИМЕР

Вычислите значения следующих выражений без использования калькулятора.

a)  $23 - 56 \div (-8) + (-5)$

b)  $(-2)^3 \times 7 - [(-5) + (-1)]^2 \div (-4)$

c)  $(-11) - (-6)^3 \div [(-4) + (-8)] + (-5)^2$

## РЕШЕНИЕ

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 23 - 56 \div (-8) + (-5) \\ & = 23 - [-(56 \div 8)] + (-5) \\ & = 23 - (-7) + (-5) \\ & = 23 + 7 - 5 \\ & = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & (-2)^3 \times 7 - [(-5) + (-1)]^2 \div (-4) \\ & = (-2)^3 \times 7 - (-6)^2 \div (-4) \\ & = (-8) \times 7 - 36 \div (-4) \\ & = -56 - (-9) \\ & = -56 + 9 \\ & = -47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & (-11) - (-6)^3 \div [(-4) + (-8)] + (-5)^2 \\ & = (-11) - (-6)^3 \div (-12) + (-5)^2 \\ & = (-11) - (-216) \div (-12) + 25 \\ & = (-11) - 18 + 25 \\ & = -11 - 18 + 25 \\ & = -4 \end{aligned}$$

Сначала разделите.  
Выполните сложение и вычитание слева направо.

Сначала вычислите сумму в квадратных скобках.  
Вычислите степени.  
Выполните умножение и деление.  
Выполните сложение.

Сначала вычислите сумму в квадратных скобках.  
Вычислите степени.  
Выполните деление.  
Выполните сложение и вычитание слева направо.



## ОБСУДИТЕ

Ученик вычислил  $33 + (-5)^2$  следующим образом:

$$33 + (-5)^2 = 33 - 25 = 8.$$

Верно ли он решил? Если неверно, то найдите правильный ответ.



## ВСПОМНИТЕ

$$\begin{aligned} (-2)^3 &= (-2) \times (-2) \times (-2) \\ (-6)^2 &= (-6) \times (-6) \end{aligned}$$

## 11 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите без использования калькулятора.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 15 - 5 \times (-2) - [30 - (1 - 3^2)] & \text{b)} \quad & (-6)^2 \div (-12) + [(-8) - (-3)]^2 \times (-2) \\ \text{c)} \quad & (5 - 9)^2 \div [(-5) - (-3)]^3 - (-7) \times (-6) + (-20) \end{aligned}$$

## 2.3 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

## НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Выполните задания без использования калькулятора.

1 Вычислите.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 8 \times (-9) & \text{b)} \quad & (-5) \times (-4) \\ \text{c)} \quad & (-6) \times 7 & \text{d)} \quad & -3 \times 0 \\ \text{e)} \quad & (-12)^2 & \text{f)} \quad & -(-4)^3 \\ \text{g)} \quad & (-3)^2 \times (-5) & \text{h)} \quad & (-2)^3 \times (-9) \end{aligned}$$

2 Вычислите.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (-38) \div (-2) & \text{b)} \quad & 132 \div (-11) \\ \text{c)} \quad & 65 \div 5 & \text{d)} \quad & (-57) \div 3 \\ \text{e)} \quad & \frac{0}{-7} & \text{f)} \quad & (-144) \div (-9) \\ \text{g)} \quad & (-6)^3 & \text{h)} \quad & \frac{162}{(-3)^3} \end{aligned}$$

3 Вычислите.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sqrt{169} \\ \text{b)} \quad & \text{Квадратный корень из } 361 \\ \text{c)} \quad & -\sqrt[3]{27} \\ \text{d)} \quad & \sqrt[3]{-343} \end{aligned}$$

## СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

4 Вычислите.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (-6) \times 3 \times (-1) \\ \text{b)} \quad & (-84) \div 7 \times 5 \\ \text{c)} \quad & (-37) \times 0 - (-8) \\ \text{d)} \quad & 63 \div (-9) + (-2) \times (-10) \\ \text{e)} \quad & (-47) - 33 \div (-3) - 3 \times (-7) \\ \text{f)} \quad & 196 \div [(-8) + (-6)] \times (-2) \\ \text{g)} \quad & [(-23) + 14] \times (-2)^2 \\ \text{h)} \quad & (-45) \times 6 \div (-3)^3 \\ \text{i)} \quad & (-7) \times (-8) \times 0 \times 34 - 4 \times (-5)^2 \\ \text{j)} \quad & (-6)^3 \div 3^2 \div [-9 - (-8)]^3 \end{aligned}$$

5 После того как Бахора начала посещать фитнес-клуб, на протяжении 3 месяцев её масса уменьшалась на 2 kg ежемесячно.

- a) Выразите ежемесячное уменьшение массы Бахоры через отрицательное число.  
b) Определите массу Бахоры через три месяца, если первоначально она весила 65 kg.

## ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

- 6 Объём воды в резервуаре каждую минуту уменьшается на 3 л. В 09:00 в сосуде было 120 л воды. Найдите объём воды в:
- a) 9:30    b) 8:50
- 7 Тимур одолжил у друга деньги. Он начал возвращать долг 7 месяцев назад, отдавая ежемесячно по 40 000 сумов. В данный момент осталось выплатить 250 000 сумов.
- a) Какую сумму Тимур взял в долг?
- b) Какую сумму останется выплатить через 3 месяца?
- 8 Жамиля вышла из дома и побежала по спортивной дорожке. В течение первых 20 минут она передвигалась со скоростью 4 m/s на север, затем – в течение 15 минут со скоростью 5 m/s на юг, потом – в течение 10 минут со скоростью 3 m/s дальше на юг. Каково было её конечное местоположение относительно дома?
- 9 Вершина Хазрет-Султан находится на высоте 4643 m выше уровня моря, а самая низкая точка пещеры Бой-Булок – на высоте 1517 m ниже уровня моря.
- a) Найдите вертикальное расстояние между самой высокой точкой вершины Хазрет-Султан и самой низкой точкой пещеры Бой-Булок.
- b) Найдите высоту, равную половине вертикального расстояния между самой высокой точкой вершины Хазрет-Султан и самой низкой точкой пещеры Бой-Булок.



10 Викторина состоит из 5 вопросов и оценивается следующим образом:

- за каждый правильный ответ 3 балла;
- за каждый неправильный ответ –2 балла;
- за вопрос без ответа 0 баллов.

- a) Каков наибольший балл викторины?
- b) Каков наименьший балл викторины?
- c) В каком случае учащийся может получить 3 балла?
- d) В каком случае учащийся может получить –3 балла?



11 a) Заполните одинаковые фигуры в данной таблице одинаковыми целыми числами.

| Левая часть                                 | Правая часть                                |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $\square \times \bigcirc$                   | $\bigcirc \times \square$                   |
| $(\square \times \bigcirc) \times \hexagon$ | $\square \times (\bigcirc \times \hexagon)$ |
| $\square \div \bigcirc$                     | $\bigcirc \div \square$                     |
| $(\square \div \bigcirc) \div \hexagon$     | $\square \div (\bigcirc \div \hexagon)$     |

b) Вычислите каждое выражение и сравните ответы правой и левой частей. Что вы поняли?